Final do Campeonato de Matemática SUB14

24-Junho-2006

# PROBLEMA 1

## *O Matemático Pedro Nunes*

O Francisco perguntou à mãe em que ano nasceu o matemático português Pedro Nunes. A mãe deu-lhe as seguintes pistas:

- A soma dos algarismos do ano é 8.
- O algarismo das unidades excede o das dezenas em 2.
- Ah! E nasceu no século XVI.

Ajuda o Francisco a descobrir em que ano nasceu Pedro Nunes.

**(Não te esqueças de explicar como chegaste à resposta)**

**Resolução do Problema 1**

Queremos saber em que ano nasceu Pedro Nunes. Como nos é dada a informação de que nasceu no século XVI, temos de encontrar um número de 4 algarismos da forma 15_ _.

Falta-nos, então, saber qual é o algarismo das unidades e qual é o das dezenas. A mãe do Francisco diz que a soma dos quatro algarismos é 8:

$$\mathbf{1 + 5+ d + u = 8}$$

Então, os dois algarismos pretendidos têm soma 2:

$$\mathbf{d + u = 2}$$

Os dois algarismos que falta descobrir são números inteiros (de 0 a 9). Podemos considerar as hipóteses possíveis para que a sua soma seja 2:

d=0, u=2
d=1, u=1
d=2, u=0

Mas temos a informação de que o das unidades excede o das dezenas em 2, o que significa que a solução terá de ser a primeira hipótese considerada.

Portanto, Pedro Nunes nasceu no ano 1502.

Facilmente se confirma que a solução encontrada está correcta. Bastaria verificar as três condições do problema:

1502 é um ano do século XVI
1+5+0+2 = 8
2 excede 0 em 2 unidades

Final do Campeonato de Matemática SUB14

24-Junho-2006

# PROBLEMA 2

## *A caixa das surpresas*

Uma caixa bem fechada, com a forma de paralelepípedo, tem um segredo.

Sabemos que a área de uma das faces é 60 $dm^2$, a área de outra das faces é 45 $dm^2$ e a área de uma terceira face é 108 $dm^2$.

Qual é o volume da caixa?

**(Não te esqueças de explicar como chegaste à resposta)**

**Resolução do Problema 2**

Cada uma das faces da caixa é um rectângulo. Como as três áreas dadas são distintas, concluímos que há três rectângulos diferentes. Porém, cada um destes três rectângulos tem um lado em comum com um dos outros dois rectângulos.

Uma vez que nos é dada a área de cada um dos rectângulos, ficamos a conhecer qual é o produto das suas dimensões.

Assim:

$a \times b = \mathbf{60}$

$b \times c = \mathbf{45}$

$a \times c = \mathbf{108}$

Em seguida, vamos decompor os números **60**, **45** e **108** em produtos de dois factores.

$\mathbf{2 \times 30 = 3 \times 20 = 4 \times 15 = 5 \times 12 = 6 \times 10 = 60}$

$\mathbf{3 \times 15 = 5 \times 9 = 45}$

$\mathbf{2 \times 54 = 3 \times 36 = 4 \times 27 = 6 \times 18 = 9 \times 12 = 108}$

Agora, temos de reparar nos factores que aparecem em cada caso e procurar 3 números **a**, **b**, **c** tais que se **a** e **b** estão no primeiro produto e **b** e **c** estão no segundo, então **a** e **c** estão no terceiro.

$\mathbf{12 \times 5}$, $\mathbf{5 \times 9}$ e $\mathbf{12 \times 9}$ são as decomposições em que cada factor é comum a dois produtos

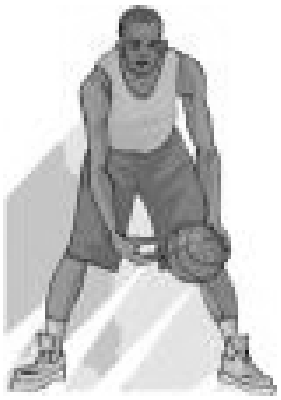
Acabámos de encontrar os três comprimentos das arestas do paralelepípedo: **5**, **9** e **12** dm.
Resta calcular o volume da caixa, multiplicando as três medidas. Então, o volume da caixa é:

$\mathbf{5 \times 9 \times 12 = 540}$ $dm^3$.

Final do Campeonato de Matemática SUB14

24-Junho-2006

# PROBLEMA 3



## *Quem joga com quem?*

Esta noite há quatro jogos de basquetebol.

Num jornal da manhã, três reputados comentadores desportivos fizeram as suas previsões sobre os vencedores de cada jogo.

- O Sr. Ambrósio apontou como vencedoras as equipas: **CAB Grândola**, **CAB Madeira**, **Belenenses, CBQ Tubarões**
- O Sr. Epifânio indicou as equipas: **CBQ Tubarões**, **Lusitânia**, **Santarém**, **CAB Madeira**
- O Sr. Gervásio elegeu as equipas: **CAB Madeira**, **Ginásio**, **CAB Grândola**, **Santarém**
- Nenhum dos 3 comentadores escolheu o **Aveiro Basket**!

Com base nas informações dadas, indica quais foram as equipas adversárias em cada um dos 4 jogos.

**(Não te esqueças de explicar como chegaste à resposta)**

**Resolução do problema 3**

Em primeiro lugar, temos que perceber que as equipas mencionadas por um mesmo comentador não podem ser adversárias de um mesmo jogo porque não seria lógico um comentador indicar duas equipas adversárias como vencedoras simultaneamente.

Em seguida, devemos organizar a informação dada de alguma forma. Uma hipótese de o fazer será através de uma tabela como a seguinte.

| Ambrósio | Epifânio | Gervásio |
|---|---|---|
| CAB Grândola | Tubarões | CAB Madeira |
| Tubarões | Lusitânia | Ginásio |
| CAB Madeira | Santarém | CAB Grândola |
| Belenenses | CAB Madeira | Santarém |

A próxima etapa será a de interpretar a tabela. Podemos começar por ver quantas vezes cada um dos clubes é referido:

CAB Madeira – 3
CAB Grândola – 2
Tubarões – 2
Santarém – 2
Belenenses – 1
Lusitânia – 1
Ginásio – 1

O CAB Madeira é citado por todos os comentadores. Só um clube não é mencionado. O único nessas condições é o Aveiro Basket. Assim, um dos pares será:
CAB Madeira / Aveiro Basket

Continuando a analisar os dados da tabela, verificamos que o CAB Grândola é incompatível com Belenenses, Tubarões, Ginásio e Santarém. Resta um clube para jogar: o Lusitânia. Outro dos pares será:
CAB Grândola / Lusitânia

Pensando de modo análogo, os Tubarões são incompatíveis com Belenenses e Santarém. Resta um clube para jogar: o Ginásio. Outro par será:
CQB Tubarões / Ginásio

Por exclusão de partes, o último par será:
Santarém / Belenenses

Final do Campeonato de Matemática SUB14

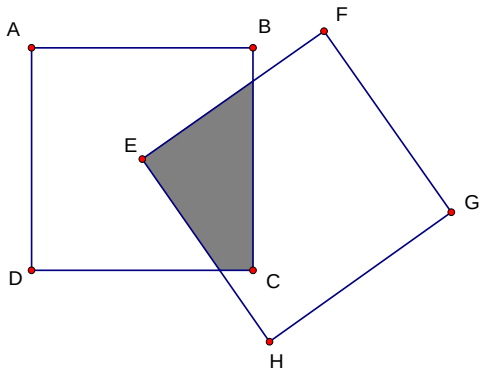
24-Junho-2006

# PROBLEMA 4

## *Dois quadrados*

Dois quadrados iguais estão sobrepostos de tal modo que o vértice de um deles é o centro do outro, como se vê na figura.

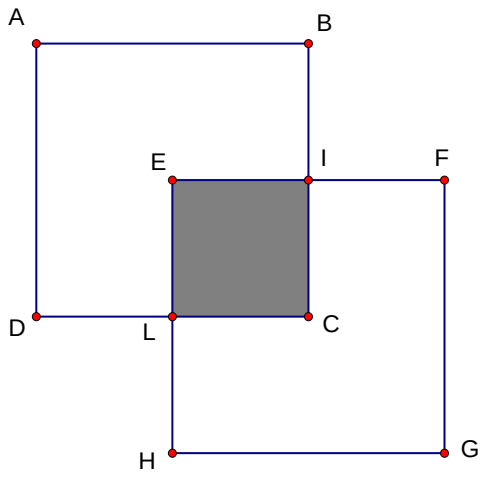
Qual é a fracção da área do quadrado correspondente à superfície pintada? Porquê?




**(Não te esqueças de explicar como chegaste à resposta)**

**Resolução do Problema 4**

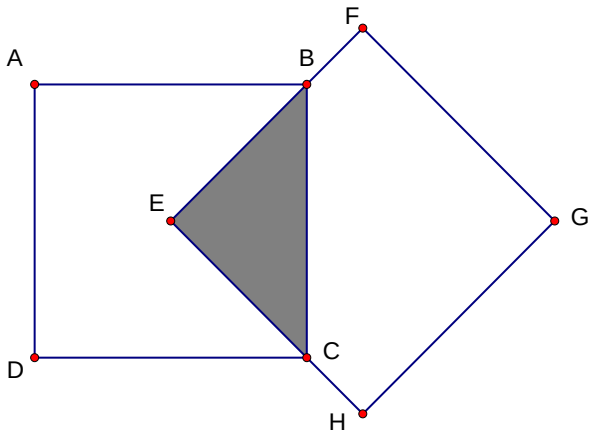
Antes de considerarmos o que acontece com a figura dada, podemos imaginar dois casos particulares em que o quadrado que tem o vértice no centro do outro está em posições que nos permitem concluir imediatamente a relação entre as áreas.



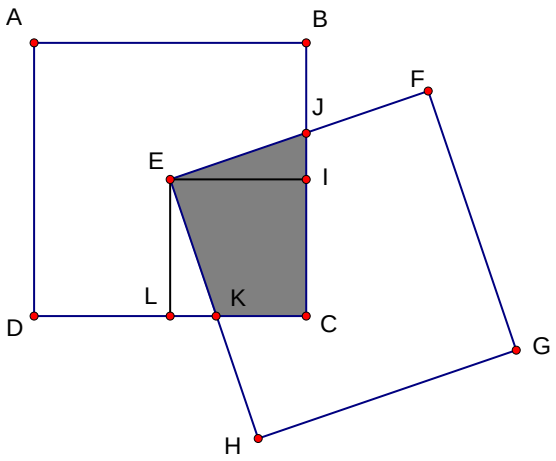

No primeiro caso, o lado do quadrado sombreado é metade do lado do quadrado maior porque E é o centro do quadrado [ABCD].

A área do quadrado maior é A= $\boldsymbol{l^2}$ e a área do quadrado sombreado é $\left(\frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{l^2}}{\boldsymbol{4}}$.

Pelo que se pode concluir que a área do quadrado menor é $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}$ da área do quadrado maior.




No segundo caso, $\overline{\boldsymbol{BD}}$ e $\overline{\boldsymbol{AC}}$ são as diagonais do quadrado [ABCD] pelo que o quadrado fica dividido em 4 triângulos iguais, logo a área do quadrado sombreado é também $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}$ da área do quadrado maior.




Neste último caso, basta mostrar que o triângulo [EIJ] é geometricamente igual ao triângulo [EKL] para voltarmos ao caso inicial e concluirmos que a área sombreada é sempre $\frac{1}{4}$ da área do quadrado [ABCD].

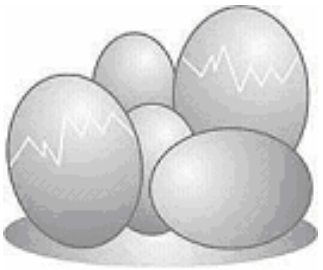
De facto, sendo EI perpendicular ao lado BC e EL perpendicular a DC, os dois triângulos [EIJ] e [ELK] são triângulos rectângulos. Verifica-se que $\overline{EL} = \overline{EI} = \frac{l}{2}$. Por outro lado, LÊI = 90º e também KÊJ = 90º, porque são ângulos internos de quadrados. Assim, JÊI + IÊK = 90º e LÊK + IÊK = 90º, donde se conclui que JÊI = LÊK.
Os dois triângulos têm um lado e os dois ângulos adjacentes a esse lado iguais, logo são triângulos iguais.

Final do Campeonato de Matemática SUB14

24-Junho-2006

# PROBLEMA 5

## *Quantos ovos estavam na capoeira?*



Quando o Sr. Eugénio recolheu os ovos da sua capoeira, experimentou guardá-los em grupos de 2, de 3, de 4, de 5, e de 6. Em qualquer dos casos sobrava sempre um ovo. Só quando os agrupou em grupos de 7 é que nenhum ovo ficou de fora.

Qual o número mínimo de ovos que ele terá recolhido da capoeira?

**(Não te esqueças de explicar como chegaste à resposta)**

**Resolução do problema 5**

O Sr. Eugénio recolheu um certo número de ovos da sua capoeira.
Sabemos que sempre que os tenta agrupar em grupos de 2, 3, 4, 5 ou 6 lhe sobra 1 ovo!
Com esta informação ficamos a saber que o número de ovos **não é** múltiplo de 2, nem de 3, de 4, de 5 e de 6.
Ao agrupar os ovos em caixas de 7 não lhe sobrou nenhum, portanto o número de ovos na capoeira é um múltiplo de 7!

Por outro lado, quando tenta agrupar em grupos de dois sobra 1, o que nos permite concluir que não é um número par. Esta informação permite excluir todos os múltiplos de 7 que são pares.

Outro dado importante é que sobra 1 quando se tenta agrupar os ovos em grupos de 5. Como os múltiplos de 5 terminam em 0 ou 5 o número pedido terá de terminar em 1 ou em 6. Mas não pode terminar em 6, porque o número que procuramos não é múltiplo de 2. Logo só pode terminar em 1.

Então já sabemos que procuramos um múltiplo de 7 que termina em 1.

Vamos olhar para alguns (os primeiros) múltiplos de 7:

7, 14, **21**, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, **91,** … Poucos terminam em 1.

$\mathbf{21} = \mathbf{7} \times \mathbf{3}$ e $\mathbf{91} = \mathbf{7} \times \mathbf{13}$

Ah! O número de ovos é da forma $\mathbf{7} \times __ \mathbf{3}$.
Temos várias hipóteses:

$\mathbf{7} \times \mathbf{3} = \mathbf{21}$
$\mathbf{7} \times \mathbf{13} = \mathbf{91}$
$\mathbf{7} \times \mathbf{23} = \mathbf{161}$
$\mathbf{7} \times \mathbf{33} = \mathbf{231}$
$\mathbf{7} \times \mathbf{43} = \mathbf{301}$
....

Vamos ver qual é o primeiro destes números que satisfaz todas as condições dadas.
O número de ovos não pode ser **21:** é um múltiplo de 3.
Será **91**? Ao dividir por 2 e 3 dá resto 1, mas por 4 já dá resto 3. Também não é!
Então e **161**? Ao dividir por 3 dá resto 2.
**231** não pode ser porque é múltiplo de 3.
Será **301**? Ao dividir por 2, 3, 4, 5 e 6 dá sempre resto 1. E é múltiplo de 7.
O número mínimo de ovos na capoeira é 301.

Haverá outros números que satisfazem as condições do problema, mas este é o menor número nas condições indicadas.