O tesouro do Rei Edgar

O Rei Edgar da Zirtuânia decidiu dividir o seu tesouro de mil barras de ouro pelos seus quatro filhos. A ordem real é a seguinte:

1 – O 1º filho receberá o dobro de barras do 2º filho.

2 – O 3º filho receberá mais barras do que os dois primeiros juntos.

3 – O 4º filho receberá menos barras do que o 2º filho.

Qual é o <u>maior</u> número de barras de ouro que o 4º filho do Rei poderá receber?

SUB14
Sítio: http://www.ualg.pt/fct/matematica/5estrelas
E-mail: sub14_7@hotmail.com (7º ano)
sub14_8@hotmail.com (8º ano)

Resolução:

O problema do tesouro do Rei Edgar requer a compreensão e utilização de todas as condições presentes na ordem real para a distribuição das 1000 barras de ouro pelos seus 4 filhos:

- O 1º filho receberá o dobro de barras do 2º filho.
- O 3º filho receberá mais barras do que os dois primeiros juntos.
- O 4º filho receberá menos barras do que o 2º filho.

A primeira análise das informações dadas permite-nos a concluir que o 1º filho recebe mais do que o 2º. O 3º filho recebe mais do que o 1º e do que o 2º. O 4º filho é o que recebe menos. Portanto, podemos colocar os filhos por ordem de vantagem na herança, do menos favorecido para o mais favorecido:

4º 2º 1º 3º

Mas estamos ainda longe da resposta. Vários dos participantes, perante as condições do problema, ensaiaram métodos de tentativa e erro controlada, conseguindo encontrar a solução com êxito. Entre outros, estão, por exemplo, o **André Campos**, da **EB 2,3 de Santo André**, em Santiago do Cacém, ou a **Sofia Voyce**, da **EBI Prof. Doutor Aníbal Cavaco Silva**, de Boliqueime, que desenvolveu o raciocínio seguinte:

Comecei por atribuir ao 4º filho 200 barras e depois fui verificar se esse valor era possível. Assim: 4º filho = 200, então o 2º filho teria que ter mais barras do que o 4º, logo atribuí 201. O 1º filho ficaria com 402 (dobro do 2º). Então o 3º filho ficaria com 1000-(200+201+402), o que dava 197, valor que não poderia ser, uma vez que o 3º filho teria que ter mais barras do que os dois primeiros juntos.
Então baixei o valor do 4º filho… …

Outro caso foi o do **Daniel António Covas**, da **EB 2,3 nº 1 de Elvas**, que fez 7 ensaios para encontrar o maior número de barras que o 4º filho do rei poderia receber. Em cada um dos ensaios, não se fixou no número de barras do 4º filho, como atrás, mas sim no número de barras do 1º filho. Vejamos algumas das tentativas do Daniel e o resultado final a que chegou:

1ª tentativa: 1º filho-250 barras de ouro, 2º filho-125 barras de ouro, 3º filho-501 barras de ouro, 4º filho-124 barras de ouro. **CERTA** (cumpre todas as regras)

(...)

4ª tentativa: 1º filho-280 barras de ouro, 2º filho-140 barras de ouro, 3º filho-441 barras de ouro, 4º filho-139 barras de ouro. **CERTA** (cumpre todas as regras)
5ª tentativa: 1º filho-290 barras de ouro, 2º filho-145 barras de ouro, 3º filho-421 barras de ouro, 4º filho-144 barras de ouro. **ERRADA** (o 3ºfilho recebeu menos que o 1º e o 2º)
6ª tentativa: 1º filho-284 barras de ouro, 2º filho-142 barras de ouro, 3º filho-433 barras de ouro, 4º filho-141 barras de ouro. **CERTA** (cumpre todas as regras)
7ª tentativa: 1º filho-286 barras de ouro, 2º filho-143 barras de ouro, 3º filho-429 barras de ouro, 4º filho-142 barras de ouro. **ERRADA** (o 3º filho recebeu o mesmo que o 1º e o 2º)

Está encontrada a resposta. O máximo que o 4º filho poderá receber é **141** barras.
Outro dos participantes que utilizou o método de tentativa e erro foi o **Ricardo Espadinha**, da **EB 2,3 Eng. Duarte Pacheco**, de Loulé. O processo, no entanto, foi um pouco distinto dos anteriores. Neste caso, o Ricardo fixou-se no número de barras que o 2º filho receberia (atribuindo valores), depois multiplicou por 2, para achar as do 1º filho, a seguir somou as barras do 1º com as do 2º e adicionou 1 barra para obter as do 3º filho e, finalmente, calculou as do 4º filho subtraindo 1 unidade às do 2º filho. Note-se que o Ricardo adiciona 1 unidade ao conjunto das barras do 1º e do 2º filho, para ter assim um valor superior. Claro que este não é o único inteiro superior; é apenas o mais pequeno dos inteiros que ultrapassam a soma. O Ricardo fez uma tabela com as suas tentativas:

1º filho	2º filho	3º filho	4º filho	Todos juntos
125 x 2 =250	125	300 + 150 = 375 375 + 1 = 376	124	875
150 x 2 = 300	150	300 + 150 = 450 450 + 1 = 451	149	1050
130 x 2 = 260	130	260 + 130 = 390 390 + 1 = 391	129	910
190 x 2 = 280	140	280 + 140 = 420 420 + 1 = 421	139	980
145 x 2 = 290	145	290 + 145 = 435 435 + 1 = 436	144	1015
143 x 2 = 286	143	286 + 143 = 429 429 + 1 = 430	142	1001
142 x 2 = 284	142	284 + 142 = 426 426 + 1 = 427	**141**	994

Após a primeira tentativa, percebe que pode aumentar o valor dado ao 2º filho, pois o total não atinge 1000. Considera um novo valor e verifica que é excessivo, pois o total ultrapassa 1000. Deste modo, vai "doseando" o número que atribui ao 2º filho, ora aumentando ora diminuindo, até chegar à resposta. Conclui que 141 barras é o máximo possível, pois o caso imediatamente anterior, com 142 barras, excederia o total de 1000.

Uma outra resolução que seguiu o processo de tentativa e erro foi apresentada pelo **Marcelo Vicente**, da **EB 2,3 Prof. Paula Nogueira**, de Olhão. Aqui, o método seguido foi novamente um pouco diferente. Começa-se por atribuir um valor ao 1º filho, depois divide-se por 2 para encontrar o do 2º filho, em seguida, somam-se esses dois valores e mais 1 unidade para o 3º filho e, por fim, encontra-se o valor do 4º filho, somando os três anteriores e calculando a diferença para 1000.
Os valores que surgem na coluna do 4º filho têm, então, de ser examinados para verificarmos se cumprem ou não a condição de serem menores do que os do 2º filho. Aparecem a vermelho as várias tentativas em que isso não aconteceu. Na penúltima linha, esta condição é verificada mas o Marcelo tenta ainda uma situação mais favorável para o 4º filho, que é a da última linha, ou seja, 141 barras.

1.º Filho	2.º Filho	3.º Filho	4.º Filho
260	130	391	219
266	133	400	201
278	139	418	165
280	140	421	159
284	142	427	147
300	150	451	99
286	143	430	141

Ao analisarmos estas respostas, podemos observar um facto interessante. É que há uma única solução para o máximo de barras do 4º filho, embora com diferentes possibilidades para os outros 3 filhos. Aqui estão essas duas possibilidades:

4º	2º	1º	3º
141	142	284	433

4º	2º	1º	3º
141	143	286	430

Muitos outros participantes usaram um método diferente, em que optaram por encontrar expressões algébricas que representassem os números de barras dos vários filhos. Por outras palavras, identificaram uma incógnita e usaram equações para chegar à solução.
Foi o caso da **Sara Vieira**, do **Colégio Internacional de Vilamoura**, em Loulé, que pensou, genericamente, como se segue. Considera-se x o número de barras do 2º filho. Então, será 2x o número de barras do 1º filho. Como o 3º filho recebe mais do que estes dois, terá de arrecadar, pelo menos, 3x+1. Quanto ao 4º filho, apenas sabemos que terá de ficar com um número inferior a x. Podemos designar esse valor por y. Portanto:

1º 2x
2º x
3º 3x+1 (nº mínimo de barras que este filho pode receber- quanto menos o 3º receber mais o 4º recebe)
4º y

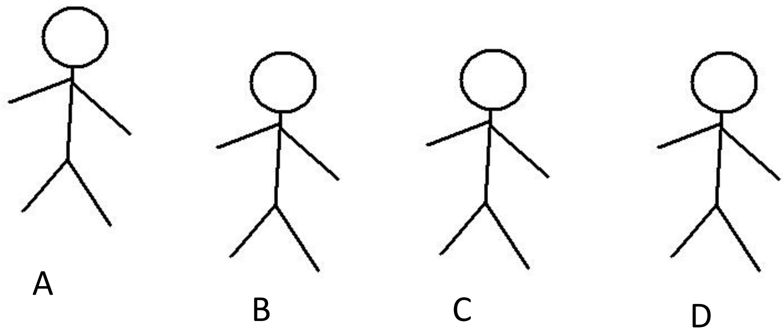
Depois de dada a explicação do significado das várias letras e expressões, recordamos que o total recebido pelos 4 filhos é 1000, ou seja, temos a equação:

$$1000=2x+x+3x+1+y \quad \Leftrightarrow \quad 1000-1=6x+y \quad \Leftrightarrow \quad 999=6x+y$$

Agora, como observa a Sara, temos calcular o valor de y. A Sara usa um raciocínio eficaz, notando que nos interessa o maior valor de y possível, isto é, o mais próximo de x. Se o y pudesse ser igual a x, o que não é permitido, a equação seria $999=7x$. Mas isto leva-nos a perceber que o x deve ser muito próximo de 999:7 (um sétimo de 999), que é aproximadamente 142,7. Então, há que fazer experiências.

Se $x = 143$, fica $2x = 286$, $3x+1 = 430$ e $y = 142$ (o maior número inferior a 143). Mas ao somarmos estes 4 resultados, deparamo-nos com um total de 1001, o que contraria o enunciado. Assim, precisamos de sacrificar o número de barras do 4º irmão, que terá de passa a ser $y = 141$, para que o total de barras seja igual a 1000.

Uma outra resolução deste tipo foi apresentada pelo **Henrique Dias**, da **EBI Prof. Doutor Aníbal Cavaco Silva**, de Boliqueime. Os quatro filhos do Rei são representados por figuras com as letras A, B, C e D.



As expressões para o número de barras de cada filho surgem assim:

O primeiro recebe 2B.

O segundo recebe B.

O terceiro recebe mais do que A e B juntos. É o mesmo que dizer mais do que 3B. Para ser maior do que 3B, basta ser mais um.

O quarto recebe menos do que o B. Para ser menos do que B, basta ser B menos um.

Segue-se a resolução da equação, sabendo-se que o total de barras é igual a 1000:

$$B+2B+3B+1+B-1=1000 \Leftrightarrow B=142,8$$

Tal como no caso anterior, o valor obtido não é inteiro. Mas se usarmos o inteiro imediatamente anterior, que é $B = 142$, teremos $2B = 284$, $3B+1 = 427$ e $B-1 = 141$. Somando tudo, obtém-se 994. O Henrique conclui que há 6 barras de sobra e que estas têm de ser atribuídas ao 3º filho que passará a receber $3B+7 = 433$ (mais do que a soma das barras do 1º e do 2º).

Na verdade, as 6 barras que sobram não podem ser dadas a mais nenhum dos outros filhos. Porquê? Se o 2º filho recebesse mais 1 barra, o 1º filho ficaria com mais 2 barras e o 3º teria de ficar com, pelo menos, mais 4. Ora isso já totaliza mais do que as 6 barras que sobraram.

O **Luís Aleixo**, da **EB 2,3 Dr. João Lúcio**, de Bias do Sul, Fuzeta, enviou uma resolução bastante semelhante, cuja conclusão, além de tudo, é bem-humorada!

$$2x+x+2x+x+y+x-y=1000$$
$$7x=1000$$
$$x=142{,}86$$

Considerando o número de barras de ouro do 2º filho com o valor arredondado de 142,86 e que o valor de y é de uma barra, posso concluir que:

1º = 2x = 286
2º = x = 143
3ª = 2x+x+y = 286 + 143 + 1 = 430
4º = x-y = 143 – 1 = 141

<u>E se o 4º filho recebesse 142 barras?</u>
4º filho - 142
2º filho - 143 (142 + 1)
1º filho - 286 (2 x 143)
3º filho - 430 (286 + 143 + 1)
142 + 143 + 286 + 430 = 1001

Assim posso concluir que o número máximo de barras que o 4º filho poderá receber é 141 e eu espero que ele me dê uma.

Por último, tivemos participantes que optaram pela utilização do Excel na resolução deste problema.

A **Ana Carrasqueira** da **EB 2,3 Prof. Paula Nogueira**, em Olhão, resolveu o problema na folha de cálculo, com a seguinte estrutura. Criou uma coluna a que chamou número de barras de ouro, que contém os números inteiros, começando em 1. Esta coluna irá representar o número de barras de ouro que são recebidas pelo 2º filho. De certo modo, esta é a sua coluna da variável x. Depois cria uma coluna para o 1º filho, que contém o dobro dos valores da coluna inicial; uma coluna para o 2º filho, que é exactamente igual à coluna inicial; uma coluna para o 3º filho, que contém a soma dos valores das colunas do 2º e do 1º filhos, acrescida de 1 unidade; uma coluna para o 4º filho, em que subtrai 1 à coluna do 2º filho; e por fim, uma coluna para o total de barras dos 4 filhos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3			barras de ouro	1º filho	2º filho	3º filho	4ºfilho	total	
4			1	2	1	4	0	7	
5			2	4	2	7	1	14	
6			3	6	3	10	2	21	
7			4	8	4	13	3	28	
8			5	10	5	16	4	35	
9			6	12	6	19	5	42	

Arrastando as fórmulas no sentido descendente, a Ana chega a um ponto em que encontra as duas hipóteses mais próximas do total de barras do rei: 994 e 1001. Perante estes resultados, explica que o valor 1001 é superior em 1 unidade ao total de barras que deverão receber os 4 filhos. Portanto, a melhor possibilidade que o 4º filho alcançará é a de receber 141 barras, ficando o 1º filho com 143 barras, o 2º com 286 barras e o 3º filho com 430 barras. Aliás, ela repara que na linha anterior já não era possível ao 4º filho receber mais do que 141 barras. Portanto, a solução passa por aumentar o número de barras dos outros três filhos, sem alterar as do 4º filho, para que todas as 1000 barras do rei sejam distribuídas.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
141			138	276	138	415	137	966			
142			139	278	139	418	138	973			
143			140	280	140	421	139	980			
144			141	282	141	424	140	987			
145			142	284	142	427	141	994			
146			143	286	143	430	142	1001			
147			144	288	144	433	143	1008			
148			145	290	145	436	144	1015			
149			146	292	146	439	145	1022			
150											

Apresentamos, ainda, a resolução do **Daniel Gonçalves**, da **EBI/JI de Paderne**, em Albufeira, também elaborada na folha de cálculo. O Daniel, para melhor explicar o seu raciocínio, apresentou também um esquema ilustrativo das relações entre as várias colunas criadas na sua tabela: 1º filho (2x), 2º filho (x), 3º filho (3x+1), 4º filho (x-1) e total dos 4 filhos.

	A	B	C	D	E	F
1	20	10	31	9	70	
2	50	25	76	24	175	
3	100	50	151	49	350	
4	200	100	301	99	700	
5	202	101	304	100	707	
6	204	102	307	101	714	
7	240	120	361	119	840	
8	250	125	376	124	875	
9	260	130	391	129	910	
10	280	140	421	139	980	
11	282	141	424	140	987	
12	284	142	427	141	994	
13	286	143	430	141	1000	
14	0		1	-1		
15	0		1	-1		
16	0		1	-1		
17	0		1	-1		
18	0		1	-1		
19	0		1	-1		
20	0		1	-1		
21	0		1	-1		
22	0		1	-1