

SUB14 - Problema 7

Quantas páginas leu a Joana?



A Joana estava a ler um livro de aventuras e no final disse aos seus amigos:

- O livro que acabei de ler tinha tantas páginas que a soma dos dígitos de todos os números das páginas é 1198!

Quantas páginas tinha o livro que a Joana leu?

RESOLUÇÕES DE
PARTICIPANTES

O Sub14 reserva-se o direito de editar as resoluções de participantes publicadas, exclusivamente no sentido de retificar pormenores de linguagem ou de correção matemática, respeitando o processo de resolução apresentado.

Catarina Macedo,

EB 2,3 de Santiago Maior, Beja

Se a Joana lesse um livro com 10 páginas, a soma total dos dígitos era 46, se o livro começasse na página 11 e acabasse na 20, a soma total dos dígitos era 56, se começasse na página 21 e acabasse na 30, era 66, e por aí a fora até o livro começar na página 81 e acabar na 90.

Depois de fazer isso, vi que existia um padrão. A soma dos dígitos de 0 a 10 era 46, de 11 a 20 era 56, de 21 a 30 era 66, de 31 a 40 era 76, de 41 a 50 era 86, de 51 a 60 era 96, depois 106, depois 116 e de 81 a 90 era 126, ou seja aumentava sempre 10.

A soma destes números todos é 774.

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 1 + 0 = 46$$

$$1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 4 + 1 + 5 + 1 + 6 + 1 + 7 + 1 + 8 + 1 + 9 + 2 = 56$$

$$\begin{array}{l} 2 + 1 + 2 + 2 + \dots + 2 + 9 + 3 + 0 = 66 \\ 3 + 1 + 3 + 2 + \dots + 3 + 9 + 4 + 0 = 76 \\ 4 + 1 + 4 + 2 + \dots + 4 + 9 + 5 + 0 = 86 \\ 5 + 1 + 5 + 2 + \dots + 5 + 9 + 6 + 0 = 96 \\ 6 + 1 + 6 + 2 + \dots + 6 + 9 + 7 + 0 = 106 \\ 7 + 1 + 7 + 2 + \dots + 7 + 9 + 8 + 0 = 116 \\ 8 + 1 + 8 + 2 + \dots + 8 + 9 + 9 + 0 = 126 \end{array} \begin{array}{l} \nearrow +10 \\ \nearrow +10 \\ \nearrow +10 \\ \nearrow +10 \\ \nearrow +10 \\ \nearrow +10 \\ \nearrow +10 \end{array}$$

$$46 + 56 + 66 + 76 + 86 + 96 + 106 + 116 + 126 = 774$$

Depois prossegui com a soma dos dígitos de 91 a 100, o que já fugia ao padrão, pois dava 127. Mas quando somei de 101 a 110 deu novamente 56 e de 111 a 120 deu novamente 66. O mesmo padrão repetia-se.

Por isso, a seguir ficava o 76, depois o 86, depois o 96, e por aí fora, até chegar ao 136, que correspondia à soma dos dígitos de 181 a 190.

A soma dos dígitos de 0 a 190 é 1765. Este resultado é maior que a soma dos números de todas as páginas que a Joana tinha dito. Por isso tirei alguns números. De 0 a 140, a soma dos dígitos é 1185 e de 0 a 150 é 1281.

O número 1198 fica entre estes dois números, 1185 e 1281.

O nº de páginas encontra-se entre 141 e 150 páginas.

$$1185 + 1 + 4 + 1 = 1191$$

$$1191 + 1 + 4 + 2 = 1198$$

R.: O livro que a Joana leu tinha 142 páginas.

Ana Sofia Guerreiro,

EB 2,3 Padre João Coelho Cabanita, Loulé

- Se o livro tivesse 9 páginas ela teria contado $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.
- Se o número de páginas fosse 19 ela teria contado $45 + 45 + 1 \times 10 = 100$
- Se ela tivesse 99 páginas no livro teria contado $45 + 45+10 + 45+20 + 45+30 + 45+40 + 45+50 + 45+60 + 45+70 + 45+80 + 45+90 = 900$
- Se fossem 109 páginas seria $900 + 45 + 10 = 955$
- Se fossem 119 páginas seria $955 + 45 + 10 + 10 = 1020$
- Se fossem 129 páginas seria $1020 + 45 + 10 + 20 = 1095$
- Se fossem 139 páginas seria $1095 + 45 + 10 + 30 = 1180$

- Como é um valor muito aproximado de 1198 passei a contar uma a uma:

- Se fossem 140 páginas seria $1180 + 1 + 4 = 1185$
- Se fossem 141 páginas seria $1185 + 1 + 4 + 1 = 1191$
- Se fossem 142 páginas seria $1191 + 1 + 4 + 2 = 1198$
- R: Por isso o livro da Joana tem 142 páginas

João Ramalho,

EB N° 1 de Reguengos de Monsaraz

1- Se somar os algarismos das primeiras 9 páginas, a soma será 45:

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9=45)$$

2- Se somar agora as páginas de 10 a 19 vou ter:

$$10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 \quad (45+1 \times 10= 55)$$

Logo a somas das 19 primeiras páginas é $45+55=100$.

3- Reparei num padrão: para continuar basta apenas somar o resultado anterior 10:

$$45 + 55 (45 + 10) = 100 \text{ (19 páginas)}$$

$$100 + 65 (55 + 10) = 165 \text{ (29 páginas)}$$

$$165 + 75 (65 + 10) = 240 \text{ (39 páginas)}$$

...

$$765 + 135 (125 + 10) = 900 \text{ (99 páginas)}$$

4- Quando cheguei a este valor pensei que não podia continuar com o mesmo raciocínio:

$$100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109 \\ 45 + (0 \times 10) + 1 \times 10 = 55 \quad (900 + 55 = 955)$$

$$110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119 \\ 45 + 1 \times 10 + 1 \times 10 = 65 \quad (955 + 65 = 1020)$$

5- Reparei num padrão: para continuar basta apenas somar 10 ao resultado anterior :

$$955 + 65 (55 + 10) = 1020 \text{ (119 páginas)}$$

$$1020 + 75 (65 + 10) = 1095 \text{ (129 páginas)}$$

$$1095 + 85 (75 + 10) = 1180 \text{ (139 páginas)}$$

6- Aprofundei o número 1180 até chegar à resposta final:

$$1180 - 139 \text{ páginas}$$

$$1185 (1180 + (1+4+0)) - 140 \text{ páginas}$$

$$1191 (1185 + (1+4+1)) - 141 \text{ páginas}$$

$$1198 (1185 + (1+4+2)) - 142 \text{ páginas}$$

Beatriz Alves,

EB 2,3 D. Martinho Castelo Branco, Portimão

O enunciado apenas nos diz que a **soma dos dígitos de todos os números** das páginas do livro é **1198**.

Da página 0 à página 9 a soma é de 45 pois $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$.

Assim, da pág. 10 à 19, já sei que a soma dos algarismos das **unidades**

(**$10+11+12+13+14+15+16+17+18+19$**) vai ser de 45 e que a soma dos algarismos das **dezenas** (**$10+11+12+13+14+15+16+17+18+19$**) vai ser 10, pois $1 \times 10 = 10$. **Da pág. 10 à 19 a soma dos dígitos dos números é de $45+10 = 55$.**

Segundo esta regra construí uma tabela:

Da página 0 à 9	45 (unidades) + 0 (dezenas)	45
Da pág. 10 à 19	45 + 10	55
Da pág. 20 à 29	45 + 20	65
Da pág. 30 à 39	45 + 30	75
Da pág. 40 à 49	45 + 40	85
Da pág. 50 à 59	45 + 50	95
Da pág. 60 à 69	45 + 60	105
Da pág. 70 à 79	45 + 70	115
Da pág. 80 à 89	45 + 80	125
Da pág. 90 à 99	45 + 90	135

Até aqui (da pág. 0 à pág. 99) a soma dos dígitos de todas as páginas é de **900**.

Como o pretendido é 1198, continuei. Mas adicionei a casa das centenas.

Da pág. 100 à 109 temos **45** (soma dos algarismos das **unidades**: $1+2+3+4+5+6+7+8+9$) + **0** (soma dos algarismos das **dezenas**:

$0+0+0+0+0+0+0+0+0+0$) + **10** (soma dos algarismos das **centenas**: $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$).

Segundo esta regra continuei a tabela:

Da pág. 100 à 109	45 + 0 + 10	55
Da pág. 119 à 120	45 + 10 + 10	65
Da pág. 120 à 129	45 + 20 + 10	75
Da pág. 130 à 139	45 + 30 + 10	85

Da pág. 0 à 139 a soma dos dígitos dos números de todas as páginas é de **1180**. A partir daqui, como faltava pouco para os 1198 fui fazendo individualmente, página a página.

$$\text{Pág. 140} - \mathbf{1} + \mathbf{4} + \mathbf{0} = \mathbf{5} \longrightarrow 1180 + 5 = 1185$$

$$\text{Pág. 141} - \mathbf{1} + \mathbf{4} + \mathbf{1} = \mathbf{6} \longrightarrow 1185 + 6 = 1191$$

$$\text{Pág. 142} - \mathbf{1} + \mathbf{4} + \mathbf{2} = \mathbf{7} \longrightarrow 1191 + 7 = \mathbf{1198}$$

Katia Oliveira,

Colégio Internacional de Vilamoura, Loulé

Formula

$$1234 = (1+2+3+4) = 10$$

Usei o Excel para fazer esta tabela com o nº de páginas e a soma dos dígitos.

Nº de página	Soma dos dígitos
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	1
11	2
12	3
13	4
14	5
15	6
16	7
17	8
18	9
19	10
20	2
21	3
22	4
23	5
24	6
25	7
26	8
27	9
28	10
29	11
30	3
31	4
32	5
33	6
34	7
35	8
36	9
37	10
38	11
39	12
40	4
41	5
...	...

110	2
111	3
112	4
113	5
114	6
115	7
116	8
117	9
118	10
119	11
120	3
121	4
122	5
123	6
124	7
125	8
126	9
127	10
128	11
129	12
130	4
131	5
132	6
133	7
134	8
135	9
136	10
137	11
138	12
139	13
140	5
141	6
142	7
143	8
144	9
145	10
146	11
147	12
148	13
149	14
150	6
Soma	1281

Comecei a retirar números de página até chegar à soma 1198.

138	12
139	13
140	5
141	6
142	7
143	
144	
145	
146	
147	
148	
149	
150	
Soma	1198

Resposta: O livro que a Joana leu tinha 142 páginas.

Superior a 1198

Gonçalo Santos,

EB 2,3 Dr. Neves Júnior, Faro

NÚMERO DAS PÁGINAS	ALGARISMOS DAS CENTENAS	ALGARISMOS DAS DEZENAS	ALGARISMOS DAS UNIDADES	SOMA DOS ALGARISMOS DAS PÁGINAS	ACUMULADO DA SOMA DOS ALGARISMOS DAS PÁGINAS
1			1	1	1
2			2	2	3
3			3	3	6
4			4	4	10
5			5	5	15
6			6	6	21
7			7	7	28
8			8	8	36
9			9	9	45
10		1		1	46
11		1	1	2	48
12		1	2	3	51
13		1	3	4	55
14		1	4	5	60
15		1	5	6	66
16		1	6	7	73
17		1	7	8	81
18		1	8	9	90
19		1	9	10	100
20		2		2	102
21		2	1	3	105
22		2	2	4	109
23		2	3	5	114
24		2	4	6	120
25		2	5	7	127
26		2	6	8	135
27		2	7	9	144
28		2	8	10	154
29		2	9	11	165
30		3		3	168
31		3	1	4	172
32		3	2	5	177
33		3	3	6	183
34		3	4	7	190
35		3	5	8	198
36		3	6	9	207
37		3	7	10	217
38		3	8	11	228
39		3	9	12	240
...		...	...	...	...

120	1	2		3	1023
121	1	2	1	4	1027
122	1	2	2	5	1032
123	1	2	3	6	1038
124	1	2	4	7	1045
125	1	2	5	8	1053
126	1	2	6	9	1062
127	1	2	7	10	1072
128	1	2	8	11	1083
129	1	2	9	12	1095
130	1	3		4	1099
131	1	3	1	5	1104
132	1	3	2	6	1110
133	1	3	3	7	1117
134	1	3	4	8	1125
135	1	3	5	9	1134
136	1	3	6	10	1144
137	1	3	7	11	1155
138	1	3	8	12	1167
139	1	3	9	13	1180
140	1	4		5	1185
141	1	4	1	6	1191
142	1	4	2	7	1198

Catarina Lages,
Colégio Internacional de Vilamoura, Loulé

Paginas	Digitos			Somatorio
1	0	0	1	1
2	0	0	2	3
3	0	0	3	6
4	0	0	4	10
5	0	0	5	15
6	0	0	6	21
7	0	0	7	28
8	0	0	8	36
9	0	0	9	45
10	0	1	0	46
11	0	1	1	48
12	0	1	2	51
13	0	1	3	55
14	0	1	4	60
15	0	1	5	66
16	0	1	6	73
17	0	1	7	81
18	0	1	8	90
19	0	1	9	100
20	0	2	0	102
21	0	2	1	105
22	0	2	2	109
23	0	2	3	114
24	0	2	4	120
25	0	2	5	127
26	0	2	6	135
27	0	2	7	144
28	0	2	8	154
29	0	2	9	165
30	0	3	0	168

110	1	1	0	957
111	1	1	1	960
112	1	1	2	964
113	1	1	3	969
114	1	1	4	975
115	1	1	5	982
116	1	1	6	990
117	1	1	7	999
118	1	1	8	1009
119	1	1	9	1020
120	1	2	0	1023
121	1	2	1	1027
122	1	2	2	1032
123	1	2	3	1038
124	1	2	4	1045
125	1	2	5	1053
126	1	2	6	1062
127	1	2	7	1072
128	1	2	8	1083
129	1	2	9	1095
130	1	3	0	1099
131	1	3	1	1104
132	1	3	2	1110
133	1	3	3	1117
134	1	3	4	1125
135	1	3	5	1134
136	1	3	6	1144
137	1	3	7	1155
138	1	3	8	1167
139	1	3	9	1180
140	1	4	0	1185
141	1	4	1	1191
142	1	4	2	1198

Carolina Guerreiro,

EBI José Carlos da Maia, Olhão

Nesta resolução eu fui somando os números por unidades, dezenas e centenas. No final, deu exactamente o valor dos dígitos mencionados pela rapariga que foi 1198, que corresponde a 142 páginas lidas.

[illegible]

Nina Muschketat,

EB 2,3 Padre João Coelho Cabanita, Loulé

Resposta: O livro que a Joana lê tinha 142 páginas.

Resolução:

Eu comecei por fazer grupos de 10 números e somá-los seus dígitos.

$$\begin{array}{rcl} 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 & = & 45 \\ 10+11+12+13+14+15+16+17+18+19 & = & 55 \\ 20+21+22+23+24+25+26+27+28+29 & = & 65 \\ 30 & & 39 = 75 \\ 40 & & 49 = 85 \\ 50 & & 59 = 95 \\ 60 & & 69 = 105 \\ 70 & & 79 = 115 \\ 80 & & 89 = 125 \\ 90 & & 99 = 135 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} +10 \\ +10 \\ +10 \\ +10 \\ +10 \\ +10 \\ +10 \\ +10 \end{array}$$
$$\underline{900}$$

$$100+101+102+103+104+105+106+107+108+109 = 55$$

$$110+111+112+113+114+115+116+117+118+119 = 65$$
$$\underline{120}$$

Em 119 páginas, há 1020 dígitos (900 + 120).

$$120 \quad 129 = 75$$

Em 129 páginas, há 1095 dígitos (1020 + 75).

$$130 \quad 139 = 85$$

Em 139 páginas há 1180 dígitos (1095 + 85).

$$\begin{array}{cccc} 139 \text{ pág.} & \xrightarrow{+5} & 140 \text{ pág.} & \xrightarrow{+6} & 141 \text{ pág.} & \xrightarrow{+7} & 142 \text{ pág.} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1180 \text{ dígitos} & & 1185 \text{ dígitos} & & 1191 \text{ dígitos} & & 1198 \text{ dígitos} \end{array}$$

Francisco Albardeiro,

ES/3 Conde de Monsaraz, Reguengos de Monsaraz

Dezenas	Soma dos dígitos
0	45
1	55
2	65
3	75
4	85
5	95
6	105
7	115
8	125
9	135
10	55
11	65
12	75
13	85
Total	1180

A minha resposta é que o livro tem 142 páginas.

(Entenda-se por 0 dezenas os números de 0 a 9, 1 dezena os números de 10 a 19 e assim sucessivamente.)

Aqui a soma total é de 1180 e se lhe somarmos a dezena 14 ficamos com uma soma de 1275 o que excede o número dado. Por isso eu vou acrescentar página a página:

$$1180+1+4+0=1180+5=1185$$

$$1185+1+4+1=1185+6=1191$$

$$1191+1+4+2=1191+7=1198$$

Por isso a resposta é que o livro tem 142 páginas.

Rui Miguel da Fonseca,
EBI/JI de Montenegro, Faro

Para resolver este problema vou fazer uma tabela dividida numa parte contando páginas de 10 em 10 começando com o 9, calculando a soma de todos os dígitos de todas as páginas com a seguinte fórmula:

$r+45(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)+10d$ r = resultado anterior

d = soma dos dígitos das dezenas com as das centenas

E a outra parte da tabela, contando de unidade por unidade começando pelo último resultado menor que 1198 da outra parte, somando ao resultado anterior a soma dos dígitos da página.

Contando de 10 em 10 começando com o 9.			Contando de unidade por unidade		
Página	conta	resultado	Página	conta	resultado
9	$0+45+0\times 10$	45	140	$1180+1+4$	1185
19	$45+45+1\times 10$	100	141	$1185+1+4+1$	1191
29	$100+45+2\times 10$	165	142	$1191+1+4+2$	1198
39	$165+45+3\times 10$	240			
49	$240+45+4\times 10$	325			
59	$325+45+5\times 10$	420			
69	$420+45+6\times 10$	525			
79	$525+45+7\times 10$	640			
89	$640+45+8\times 10$	765			
99	$765+45+9\times 10$	900			
109	$900+45+1\times 10$	955			
119	$955+45+2\times 10$	1020			
129	$1020+45+3\times 10$	1095			
139	$1095+45+4\times 10$	1180			
149	$1180+45+5\times 10$	1275			

Resposta: O livro que a Joana leu tinha 142 páginas.

Roman Babynyuk,

EB 2,3 Dr. António da Costa Contreiras, Silves

Para resolver este problema eu fiz a seguinte tabela:

Páginas	Soma dos dígitos	Total acumulado
1-9	45	45
10-19	55	100
20-29	65	165
30-39	75	240
40-49	85	325
50-59	95	420
60-69	105	525
70-79	115	640
80-89	125	765
90-99	135	900
100-109	55	955
110-119	65	1020
120-129	75	1095
130-139	85	1180
140-142	18	1198

Assim, podemos concluir que o livro lido pela Joana tinha 142 páginas.

David Ramires,

EB 2,3 de Monte Gordo

A soma dos dígitos das páginas é igual a 1198. Então, com início na página 1, fui somando os dígitos das páginas, ao número anterior. Para facilitar o cálculo, fiz a soma no Excel - primeiro um dígito (de 1 a 9), depois dois dígitos (de 10 a 99) e três dígitos de 100 até 136. Cheguei ao resultado: o livro que a Joana está a ler tem 142 páginas.